

André-Quillen (co)homology

主題: Jacobi-Zariski seq. (第1基本完全列)

$Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} S$: ring hom. に対し

$$\Omega_{R/Q} \otimes_R S \rightarrow \Omega_{S/Q} \rightarrow \Omega_{S/R} \rightarrow 0 : \text{ex.}$$

N : S -Mod. に対し

$$\text{Der}_Q(R; N) \leftarrow \text{Der}_Q(S; N) \leftarrow \text{Der}_R(S; N) \leftarrow 0 : \text{ex.}$$

“導来”したい.

($\Omega_{S/R}$ は $\text{Der}_R(S, -)$ で表現する)

問題: Alg_R は Abelian 圏でない.

観察:

$$\begin{array}{ccc} & A & \text{加法的, 右完全} \\ & \cap & \\ F: \text{Mod}_R & \rightarrow & \text{Ab} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Ch}_{\geq 0}(\text{Mod}_R) & \rightarrow & \text{Ch}(\text{Ab}) \xrightarrow{h_i} \text{Ab} \\ & \cup & \cup \\ & A & \text{LiF}(A) \\ \text{proj. resol.} \uparrow & & \uparrow \\ P. & \mapsto & F(P.) \mapsto h_i F(P.) \end{array}$$

Alg_R でも似たことをしたいが、
 $\text{Ch}_{\geq 0}(\text{Alg}_R)$ のようなものは無い.

よって $\text{Ch}_{\geq 0}(\text{Mod}_R)$ は $\text{Ch}_*(R)$ と略記.

Fact. (Dold-Kan corr.)

$$\begin{array}{c} \text{Ch}_*(R) \simeq s\text{Mod}_R \\ \parallel \\ \text{Fun}(A^{\mathbb{N}}, \text{Mod}_R) \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} s\text{Alg}_R \text{ で似たことを} \\ \parallel \\ \text{Fun}(A^{\mathbb{N}}, \text{Alg}_R) \end{array} \text{ できるかも.}$$

構造を抽象化

Alg_R に適用

$\text{Ch}_{\geq 0}(\text{Mod}_R)$ (Abelian 圏)

モデル圏

$s\text{Alg}_R$

の導来関手

$$F: \text{Mod}_R \rightarrow \mathcal{A} : \begin{array}{c} \text{加法的} \\ \text{右完全関手} \end{array}$$

total derived functor

$$F: \mathcal{C} \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathcal{D} : G$$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\mathbb{L}} \mathcal{D}$: Quillen functor

$$\textcircled{1} P. \rightarrow A : \text{proj. resol.}$$

$$\widetilde{\text{Ch}}_*(R) : \text{複体の圏} \simeq s\text{Mod}_R$$

$$\textcircled{1} \Gamma X \rightarrow X : \text{cofibrant replacement (e.g. CW approx.)}$$

$$\textcircled{2} \text{LiF}(X) := \pi_i(F(\Gamma X))$$

$$\textcircled{1} X_{\bullet} \rightarrow A : \text{"simplicial" free resol.}$$

$s\text{Alg}_R$: simplicial R -algebra
モデル圏の構造をもつ

$$\textcircled{2} \text{LiF}(A) := \pi_i(F(X_{\bullet}))$$

☆モデル圏

モデル圏の定義と例

Def. (モデル圏)

モデル圏とは、圏 $\mathcal{C}$ に 3 種類の射のクラス (W: weak equivalence, Fib: fibration, Cof: cofibration) が指定されていて以下の公理を満たすもの。

(M1) $\mathcal{C}$ は完備かつ余完備。

(M2) 3つの射のクラスはレトラクトで閉。

(M3) [2-out-of-3] $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

f, g, gf のうち 2 つが w.eq. ならば 3 つ目も w.eq.

(M4) [Lifting] $A \rightarrow X$
 $\text{cofib}: j \downarrow \cap \downarrow q: \text{fib.}$ は j が q に対して w.eq. ならば
 $B \rightarrow Y$ リフトを持つ。

(M5) [Factorization] 任意の $X \xrightarrow{f} Y$ は

(i) $X \xrightarrow{\text{cofib}} Z \xrightarrow[\text{w.eq.}]{\text{fib}} Y$ という分解を持つ。

(ii) $X \xrightarrow[\text{w.eq.}]{\text{cofib}} Z' \xrightarrow{\text{fib}} Y$

特に始/終対象をもつ

$A \xrightarrow{f} B$ 及び $X \xrightarrow{g} Y$ のレトラクト

$$\Leftrightarrow \exists \text{ 図式 } \begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ A & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & g \downarrow & & f \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

Fib と Cof は互いを定める。

(#0) $\xrightarrow{!} Y \in \text{Cof}$ ならば

Y は cofibrant であるという
 fibrant も同様。

$$\begin{array}{ccc} (\#0) & \xrightarrow{!} & X \\ \text{cofib.} \downarrow & (ii) \nearrow & \uparrow \text{w.eq. fib.} \\ & \square X & \end{array}$$

X の cofibrant replacement
 とは is.

Thm. ($\text{Ch}_*(R)$ はモデル圏になる)

$\text{Ch}_*(R)$ は。

$$\bullet W = \{ f: M. \rightarrow N. \mid H_* f: H_*(M.) \xrightarrow{\cong} H_*(N.) \}$$

$$\bullet \text{Fib} = \{ f: M. \rightarrow N. \mid \forall n \geq 1, f_n: M_n \xrightarrow{\text{surj}} N_n \}$$

$$\bullet \text{Cof} = \{ f: M. \rightarrow N. \mid \forall n \geq 0, f_n: M_n \xrightarrow{\text{inj}} N_n \text{ かつ } \text{Coker}(f_n): \text{proj.} \}$$

とするとモデル圏の構造を持つ。

Cor. この構造において $A \in \text{Mod}_R$ の cofibrant replacement とは射影分解のことである。

Thm. (Top はモデル圏になる)

Top (位相空間と連続写像の圏) は。

$$\bullet W = \{ f: X \rightarrow Y \mid \pi^* f: \pi^*(X) \xrightarrow{\cong} \pi^*(Y) \}$$

$$\bullet \text{Fib} = \{ f: X \rightarrow Y \mid f: \text{Hurewicz fibration} \}$$

$$\bullet \text{Cof} = \{ f: X \rightarrow Y \mid f: \text{closed Hurewicz cofibration} \}$$

定義は省略する。
 May と参照。

とするとモデル圏の構造を持つ。

Cor. この構造において cofibrant replacement とは CW-近似のことである。

まとめ。鎖複体の圏や射影分解の構造を抽象化した。

☆ Quillen 関手とホモトピー圏

モデル圏の間の“良い”関手と基本構成

Def. (Quillen 関手) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: モデル圏

$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への **Quillen 関手** とは、随伴関手の組

$$F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

であって、以下をみたすもの。

(1) F は cofib. 及び cofibrant 間の w.eq. を保つ。

(2) G は fib. 及び fibrant 間の w.eq. を保つ。

e.g. $R \xrightarrow{f} S$: 環同型

$$\begin{array}{ccc} \text{スカラー拡大} & \text{Ch}_*(R) & \\ S \otimes_R - : \downarrow \uparrow & : \text{res}_f & \\ & \text{Ch}_*(S) & \\ & \text{は Quillen 関手.} & \end{array}$$

Def. (Quillen 同値)

Quillen 関手 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ が **Quillen 同値** であるとは、

$$\forall \begin{array}{l} X : \text{cofibrant in } \mathcal{C} \\ Y : \text{fibrant in } \mathcal{D} \end{array}, \left[\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ GY \end{array} \in W_{\mathcal{C}} \iff \begin{array}{c} FX \\ \downarrow \\ Y \end{array} \in W_{\mathcal{D}} \right] \text{ であること.}$$

Def. (ホモトピー圏) $\mathcal{C}$: モデル圏

以下の普遍性をみたす圏 $(\mathcal{C} \xrightarrow{L} \text{Ho}(\mathcal{C}))$ が (up to eq.) 一意に存在する。

「 $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が w.eq. を iso にうつすなら $\exists! \tilde{F}: \text{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}, F \circ L = \tilde{F}$ 」

$\text{Ho}(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ の **ホモトピー圏** と言う。

☆ total derived functor

モデル圏間の“良い”関手はホモトピー圏に落ちる

Def. (total derived functor) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$: モデル圏

Quillen 関手 $F: \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$ に対し.

F の左 **total derived functor** LF を以下のように定める.

RG も同様.

(fib. repl. を取り)

「各 $X \in \mathcal{C}$ に対し $X_c \rightarrow X$: cofibrant replacement を取り.

$$LF(X) := F(X_c) \text{ とする.}$$

up to w.eq. τ well-defined.

これにより $LF: Ho(\mathcal{C}) \rightleftarrows Ho(\mathcal{D}) : RG$ は随伴関手の組を定める.

e.g. $f: R \rightarrow S$: 環準同型

Quillen 関手 $S \otimes_R - : Ch_*(R) \rightleftarrows Ch_*(S) : res_f$

から $S \otimes_R^L - : D_{\geq 0}(Mod_R) \rightleftarrows D_{\geq 0}(Mod_S) : res_f$

$$\begin{array}{ccc} Tor_i^R(S, -) : & \searrow & \downarrow h_i \\ & & Mod_S \end{array}$$

☆ 単体的対象 $sMod_R, sAlg_R$ の定義と付加構造

Def. (単体的対象) $\mathcal{C}$: 圏

- $[n] := \{0 < 1 < \dots < n\}$: 順序集合
- $\Delta := \begin{cases} \text{対象: } [n] \text{ たち } (n \geq 0) & \text{simplex} \\ \text{射: 非減少写像} & \text{単体の圏} \end{cases}$
- $s\mathcal{C} := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \mathcal{C})$: simplicial object : 単体的対象の圏
- $s\text{Set} := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, \text{Set}) = \hat{\Delta}$: simplicial set : 単体的集合の圏
- $sMod_R := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, Mod_R)$: 単体的 R 加群の圏
- $sAlg_R := \text{Fun}(\Delta^{\text{op}}, Alg_R)$: 単体的 R 代数の圏

Δ の射は次の2種類で生成される。

$$\begin{array}{ccc} [n] = \{0 < \dots < i < \dots < n\} \\ \delta_i \uparrow & \swarrow & \searrow \\ [n-1] = \{0 < \dots < n-1\} \\ \\ [n+1] = \{0 < \dots < i < i+1 < \dots < n+1\} \\ \sigma_i \downarrow & \swarrow & \searrow \\ [n] = \{0 < \dots < i < \dots < n\} \end{array}$$

$$\boxed{\Delta} \xrightarrow[X_{\text{op}}]{} \boxed{\text{Set}}$$

$$\begin{array}{ccc} [n+1] & & X_{n+1} \\ \sigma_i \downarrow & & \uparrow s_i \\ [n] & \mapsto & X_n \\ \delta_i \uparrow & & \downarrow d_i \\ [n-1] & & X_{n-1} \end{array}$$

$X: s\text{Set}$ とは、 Δ - Set

$$\left(\begin{array}{l} \bullet \{X_n: \text{集合}\}_{n \in \mathbb{Z}} : n\text{-単体 の 集合} \\ \bullet \{s_i: X_n \rightarrow X_{n+1}\} : \text{degeneracy operator} \text{ の族} \\ \bullet \{d_i: X_n \rightarrow X_{n-1}\} : \text{face operator} \text{ の族} \end{array} \right)$$

であって、 (s_i, d_i) の自然性関係) を満たすもの。
 $X: sMod_R$ なら “集合” が “ R 加群” に変わる。

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} & & \xrightarrow{d_0} \\ \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{s_0} & & \xleftarrow{s_0} \\ \xrightarrow{d_1} & & \xleftarrow{s_1} & & \xleftarrow{d_1} \\ \xleftarrow{s_1} & X_2 & \xrightarrow{d_1} & X_1 & \xleftarrow{s_0} X_0 \\ \xrightarrow{d_2} & & \xleftarrow{s_2} & & \xleftarrow{d_2} \\ \xleftarrow{s_2} & & \xrightarrow{d_2} & & \vdots \\ \xrightarrow{d_3} & & & & \vdots \end{array}$$

R -環同型 R 加群

☆ Dold-Kan correspondence $sMod_R$ はモデル圏の構造を持つ。

$$\begin{array}{c}
 X \in sMod_R, \text{つまり} \\
 X = \cdots \xleftarrow{s_0} \xleftarrow{d_1} X_2 \xleftarrow{s_1} \xleftarrow{d_2} X_1 \xleftarrow{s_0} \xleftarrow{d_1} X_0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{d_0} \\
 \xleftarrow{s_0} \\
 \xrightarrow{d_1} \\
 \xleftarrow{s_1} \\
 \xrightarrow{d_2} \\
 \xleftarrow{s_2} \\
 \xrightarrow{d_3}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{d_0} \\
 \xleftarrow{s_0} \\
 \xrightarrow{d_1} \\
 \xleftarrow{s_1} \\
 \xrightarrow{d_2}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{d_0} \\
 \xleftarrow{s_0} \\
 \xrightarrow{d_1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{を加群の複体にするには?} \\
 NX_n := \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } d_i \subseteq X_n \\
 \partial_n := d_0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow N \\
 NX = \cdots \xrightarrow{d_0} NX_2 \xrightarrow{d_0} NX_1 \xrightarrow{d_0} NX_0 : \text{normalized chain complex}
 \end{array}$$

Thm. (Dold-Kan correspondence)

$$N : sMod_R \rightarrow Ch_*(R)$$

は圏同値である。

モデル圏
 モデル圏の構造を移植する。

逆 $K : Ch_*(R) \rightarrow sMod_R$ は、米田より

$$\begin{aligned}
 (KC)_n &= \text{Hom}_{sMod_R}(R[\Delta^n], KC) \\
 &= \text{Hom}_{Ch_*(R)}(NR[\Delta^n], C) \text{ だと決まる。}
 \end{aligned}$$

$X \in sMod_R$ に対し、

$$\pi_q X := h_q(NX) \text{ とおく。}$$

$X \in sAlg_R$ なる様を忘れて同様。

Thm. ($sMod_R$ はモデル圏になる)

$sMod_R$ は、

$$\begin{aligned}
 \bullet W &= \{f : X \rightarrow Y \mid \pi_* f : \pi_*(X) \xrightarrow{\sim} \pi_*(Y)\} \\
 \bullet \text{Fib} &= \{f : X \rightarrow Y \mid \forall n \geq 1, NX_n \xrightarrow{\text{surj}} NY_n\}
 \end{aligned}$$

とするとモデル圏の構造を持ち、 N は Quillen 同値。

☆ Simplicial algebra

$sAlg_R$ はモデル圏の構造を持つ。

Thm. ($sAlg_R$ はモデル圏になる)

$sAlg_R$ は、

$$\begin{aligned}
 \bullet W &= \{f : X \rightarrow Y \mid \pi_* f : \pi_*(X) \xrightarrow{\sim} \pi_*(Y)\} \\
 \bullet \text{Fib} &= \{f : X \rightarrow Y \mid X \xrightarrow{\text{surj}} \pi_0 X \times_{\pi_0 Y} Y\}
 \end{aligned}$$

とするとモデル圏の構造を持つ。

$$\text{Sym} : sMod_R \rightleftarrows sAlg_R : \text{Forg}$$

により $sMod_R$ のモデル圏構造をうつす。(いつも随分どうせよとは限らないが今回は大丈夫)

よって $sAlg_R$ は Quillen 関手になる。

まとめ. $sMod_R, sAlg_R$ がどちらもモデル圏構造を持った。

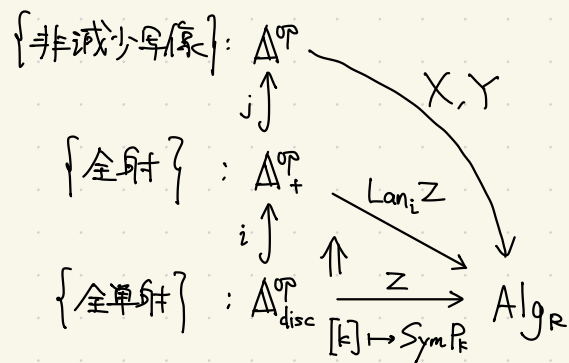
☆ free morphism

$sAlg_R$ の cofibration を特徴づける.

Def. (free morphism)

$f: X \rightarrow Y: sAlg_R$ の射が **free** であるとは、
射影 R 加群の族 $\{P_k\}_{k \geq 0}$ が存在し、
 $(X \circ j) \xrightarrow{\text{標準包含}} (Y \circ j)$ と factor する。
 $(X \circ j) \otimes \text{Lan}_i Z \xrightarrow{\sim} (Y \circ j) \otimes \text{Lan}_i Z$ ($Z_k = \text{Sym}_R P_k$, i は右図)

Hom set



どういうことか？

だいたい $Y_n = X_n \otimes \text{自由生成成分}$ (+ 下の次数から退化して上がる成分)
なので、" $Y = X[x_1, \dots, x_n]$ " みたいな X -ジのほう。

Thm. ($sAlg_R$ の cofibration)

- $\text{Cof} = \{\text{free morphism のレフト}\} \rightarrow \text{ある}$.
- さらに、任意の $f: X \rightarrow Y$ in $sAlg_R$ は自然に
 $X \xrightarrow{\text{free}} Z \xrightarrow[\text{w.eq.}]{\text{fib.}} Y$ と factor する。

cofib free
"射影加群は自由加群の直和因子"

ほい特徴づけ。

$$P: \text{proj. } R\text{-Mod} \Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} R & = & R & = & R \\ \downarrow & & \downarrow^{\text{free}} & & \downarrow \\ P & \rightarrow & R^{\oplus n} & \rightarrow & P \\ & & \text{id} & & \end{array}$$

- $R \rightarrow S$ in $sAlg_R$ の
 $R \rightarrow R[x_s | s \in S] \rightarrow S$ 的 factor

まとめ $(R \rightarrow)A: sAlg_R$ の cofibrant replacementは、

$$(R \rightarrow)R[X] \rightarrow A \text{ の } X\text{-ジ。}$$

☆ (André-) Quillen homology

Abelianization の 導来関数

Def. (abelian object) $\mathcal{C}$: 終対象 $*$ と二項積をもつ圏

• $A \in \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ の **abelian object** であるとは.

$$\begin{cases} m: A \times A \rightarrow A & (\text{積}) \\ \varepsilon: * \rightarrow A & (\text{零元}) \\ i: A \rightarrow A & (\text{逆元}) \end{cases} \text{ を持ち,}$$

省略.

Abel 群の公理図式を満たすこと.

$\mathcal{C} \xleftarrow{\text{forg}} \mathcal{C}_{\text{ab}}$ はあるが.

$$A \mapsto (A, m, \varepsilon, i)$$

部分圏 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}_{\text{ab}}$

と考えるべきではない.

• $\mathcal{C}_{\text{ab}} := \mathcal{C}$ の abelian object (とその構造の組) 及び
その間の構造を保つ射からなる圏

Caution 「 $A \in \text{Alg}_R$ は A は加法群ともみなせる」という話ではない.

$\therefore m: A \times A \rightarrow A$ は Alg_R の射であり. 特に環として積を保つ必要がある.

さらに, $\mathcal{C}, \mathcal{C}_{\text{ab}}$ にモデル圏構造が入っており.

$\mathcal{C} \xleftarrow{\text{forg}} \mathcal{C}_{\text{ab}}$ が Quillen 関手の右側になっているとする.

このとき左側 $\text{Ab}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_{\text{ab}}$ を **abelianization** と呼ぶ.

直感的にも "abel 化" になっている.

Def. (Quillen homology)

上の仮定の下, abelianization の total derived functor, つまり

$\pi_q \text{LAb}(X) \equiv X$ の **Quillen homology** という.

まとめ. Abelianization の 導来関数を **Quillen homology** という.

Def. (André-Quillen homology)

$\mathcal{C} = s\text{Alg}_R/A$ は仮定を満たす. この場合の A の Quillen homology を

$D_q(A/R) := \pi_q \text{LAb}(A)$ とおき, **André-Quillen homology** という.

より一般に

$$D_q(A/R; M) := \pi_q(\text{LAb}(A) \otimes M).$$

Q. これは一体なにを "導来" しているのか?

$\leadsto s\text{Alg}_R/A$ における abelianization を調べる必要がある.

☆ Alg_R/A の abelianization

Alg_R/A における $\text{Ab} =$ 微分加群

Def. (idealization, square-zero extension)

$M : \text{Mod}_A$ に対し、その idealization

$A \ltimes M : \text{Alg}_R/A$ を以下のように定める:

$$\begin{aligned} &:= \begin{cases} \text{集合としては } A \oplus M \\ \text{積は } (a, x) \cdot (b, y) := (ab, ay + bx) \end{cases} \end{aligned}$$

① $0 \rightarrow M \rightarrow A \ltimes M \rightarrow A \rightarrow 0$: ex.

がある (i.e. M は $A \ltimes M$ の "イデール" になっている)

② 次数付き環 $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$
 $\Rightarrow S_2$ 以降で割るとこの積が出る.

③ 要するに $A[M]/M^2$ みたいな環.

<Key> $A \ltimes M$ は $\text{Der}_R(-, M)$ を表現する.

i.e. $\text{Hom}_{\text{Alg}_R/A}(-, A \ltimes M) \cong \text{Der}_R(-, M)$
 $(f, g) \mapsto g$

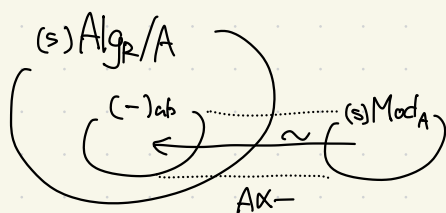
(注) $\Omega_{S/R}$ は $\text{Der}_R(S, -)$ を表現する.

i.e. $\text{Hom}_{\text{Mod}_X}(\Omega_{S/R}, -) \cong \text{Der}_R(S, -)$

Thm. ($s\text{Alg}_R$ の abelian obj.)

$(\text{Alg}_R/A)_{\text{ab}} \leftarrow \text{Mod}_A : A \ltimes -$ は圏同値.

$(s\text{Alg}_R/A)_{\text{ab}} \leftarrow s\text{Mod}_A$ ↓ の逆 は圏同値.



・実は $\text{Hom}(-, A)$ が自然に Abelian 群になる
 A は abelian obj. になる.

・逆に $S \in \text{Alg}_R/A$ は abelian obj. になる
 $A \xrightarrow{\varepsilon} S \xrightarrow{f} A$ 核射 A 上の $f: \text{surj.}$
 $S = A \ltimes \text{Ker } f$ となる.

$$\text{Hom}_{\text{Alg}_R/A} \begin{pmatrix} X \\ A \ltimes M \end{pmatrix} \cong \text{Der}_R(X, M|R) \cong \text{Hom}_{\text{Mod}_X} \begin{pmatrix} \Omega_{X/R} \\ M|_X \end{pmatrix} \cong \text{Hom}_{\text{Mod}_A} \begin{pmatrix} A \otimes_R \Omega_{X/R} \\ M \end{pmatrix}$$

Thm. ($s\text{Alg}_R$ の abelianization)

$A \otimes_R \Omega_{\bullet/R} : s\text{Alg}_R/A \xrightleftharpoons{\perp} s\text{Mod}_A : A \ltimes -$ は Quillen functor.

||
 Ab.

まとめ. André-Quillen homology は、" $A \otimes_R \Omega_{\bullet/R}$ " という微分加群関手を用いて simplicial な方法で導出したものである.

☆ 余接複体 と 第1完全列 最初の目的が達成されていることを確認す。

Def. (余接複体)

$A \otimes_A \Omega_{A/R} : \text{Alg}_R/A \rightarrow \text{Mod}_A$ の ホモロジー を取る前の total derived functor,

すなわち cofibrant replacement $X \rightarrow A$ を取って定まる

$L_{A/R} := A \otimes_A \Omega_{A/R}$ を 余接複体 (cotangent complex) という。

よ, 2 by def $\tau \cdot D_q(A/R) = \pi_q L_{A/R}$.

Thm. (第1完全列の延長) $R \rightarrow A \rightarrow B$: 環準同型の列

$B \otimes_A L_{A/R} \rightarrow L_{B/R} \rightarrow L_{B/A}$ は SAlg_B の cofiber seq. である。

任意の $M : B\text{-Mod}$ に対し長完全列を誘導する。

$$\cdots \rightarrow D_i(A/R; M) \rightarrow D_i(B/R; M) \rightarrow D_i(B/A; M)$$

$$\rightarrow M \otimes_A \Omega_{A/R} \rightarrow M \otimes_B \Omega_{B/R} \rightarrow M \otimes_B \Omega_{B/A} \rightarrow 0 : \text{ex.}$$

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A L_{A/R} & \rightarrow & L_{B/R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & L_{B/A} \end{array}$$

is pushout.

☆可換環論での利用 主に完交環について.

□ fundamental spectral sequence

$$\varphi: R \longrightarrow S \quad \text{in } \text{Alg}_R$$

$$\begin{array}{ccc} \underline{\varphi}: \underline{R} & \longrightarrow & \underline{S} \\ & \searrow & \uparrow \scriptstyle \varepsilon \\ & A & \xrightarrow{\text{resol.}} A \otimes_R S \cong K \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{in } \mathcal{S} \mathcal{A} \log_R \\ \nearrow \scriptstyle \varepsilon^{-1} \end{array}$$

$$\tau_3 \in L_{S/R} = J/J^2 \in \tau_3.$$

$$\mu_R^S : S \otimes_R S \rightarrow S \quad \forall \text{ bij. } f_2^1 \in \mathcal{T}.$$

$\cdots \subseteq J^2 \subseteq J \subseteq A$ is fundamental spectral sequence

$$F_{p,q}^1 = [J^q/J^{q+1} \otimes N]_{p+q} \Rightarrow F_{p+q} = k^{p+q}(A \otimes_s N) \quad \square \text{ 得证.}$$

の端を見子と

$$\text{Tor}_3^R(S, N) \rightarrow D_3(S/R; N) \rightarrow \bigwedge_s^2 \text{Tor}_1^R(S, S) \otimes_s N \rightarrow \text{Tor}_2^R(S, N) \rightarrow D_2(S/R; N) \rightarrow 0$$

: ex.

2 基本性質 $\varphi: R \rightarrow S$

$$\circ \operatorname{Tor}_n^R(S, N) \rightarrow D_n(S/R; N) \text{ がある.}$$

$$\varphi: \text{surj.} \quad \text{z. } I = \text{Ker } \varphi \quad \text{z. } 3$$

$$\bullet \operatorname{Tor}_i^R(S, N) \xrightarrow{\sim} D_i(S/R; N) \cong (I/I^2) \otimes N \quad (\text{第2完全列})$$

さらに $I = (r: \text{非零因子})$ なる

$$\circ L_{S/R} = \sum_{\substack{\dots \\ \text{對重}}} S$$

Def. (l.c.i. mor.) $\varphi: R \rightarrow S$: ess. of f.t. (fin. type + Bifinite)

φ is locally complete intersection

＝水以外した一般にもあるらしい
(Arranov)

$$\Leftrightarrow \exists R \rightarrow R[Y]_S \xrightarrow{\psi'} S, \quad \psi' \text{ 是 l.c.i.}, \quad \psi'_\Gamma, \text{Ker}(\psi'_\Gamma) \text{ 正则列生成}$$

Thm. 8.4 (l.c.i. mor. の検出) $\varphi: R \rightarrow S$: Noether 環の射 TFAE

(a) φ is l.c.i.

$$(b) D_{22}(S/R, -) = 0$$

$$(c) D_2(S/R, -) = 0$$

↓ $L = \sum \# \text{元} S$

8.5 以便一个局所地判定.

Thm. 8.5 (local バージョン)

$$\psi: (R, m, k) \rightarrow (S, n, l) : \text{Noether 局所環の局所射}$$

$$D_2(S/R, \mathfrak{d}) = 0 \quad \nexists \varphi: \text{l.c.i.}$$

$$\text{prf. } R \rightarrow R' = R[Y]_q \xrightarrow{\varphi'} S \quad \text{c.p.m.}$$

有限 自由と局所化の D_{21} は消えるので $D_{21}(R/R; -) = 0$

$$\begin{array}{ccccc} \text{J-Z} & D_2(R/R; l) \rightarrow D_2(S/R; l) \xrightarrow{\sim} D_2(S/R'; l) \\ \wr & \downarrow \text{|| 恒等} & \Rightarrow & \downarrow \text{||} & \text{for } R \in R' \text{ に注意して.} \\ & 0 & & 0 & \varphi: \text{surj. としてよい. 特に } k = l. \end{array}$$

$R \rightarrow R/(K) = S \in L$. K の極小生成元 $\varepsilon r_1, \dots, r_c$ とする. c の帰納法で $K: \text{reg.}$ を示す.

(C=1) $S = R/rR$. 前Pの fundamental spec seq. により、完全可

$$\begin{array}{c} \cdots \rightarrow \underbrace{\wedge^2 \text{Tor}_1^R(S, S)}_{\cong r/r^2} \otimes_S k \rightarrow \text{Tor}_2^R(S, k) \rightarrow D_2(S/R; k) \rightarrow 0 \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\cong k} \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \text{ 验证} \\ 0 & \leftarrow & 0 \\ & \searrow & \\ & \text{pd}_R S \leq 1 & \end{array} \end{array}$$

$$\left[\dots \rightarrow R \xrightarrow{r} R \right]$$

$\downarrow$
 S

$\text{pr. min. proj. resol. t. s. } \alpha \cdot r \cdot \text{inj.} \quad //$

$(c > 1)$ $R' = R/(r_1, \dots, r_{c-1})$ とおく. $R \rightarrow R' \rightarrow S$ は J -Z

$$D_2(R/R; k) \xrightarrow{\text{恒等}} D_2(S/R; k) \rightarrow D_2(S/R'; k) \quad \text{surj. の } D_1 \text{ は Tor で計算して OK.}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow D_1(R/R; k) & \rightarrow & D_1(S/R; k) & \rightarrow & D_1(S/R'; k) & \rightarrow & k \otimes_{R'} \underline{\Omega}_{R'/R} = 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ k^{G-1} & & k^G & & k & & \end{array} \quad \text{f.e. } D_2(S/R'; k) = 0$$

$C=1$ のやつ $\sum_{\substack{\downarrow \\ \downarrow}} S = R' / r_C$
 r_C は非素因子.

非因子で割ることはOK.

$$\leadsto D_3(S/R'; k) = 0$$

$$\underline{J^Z} \rightarrow D_2(R/R; k) = 0 \quad c-1\text{個の乗除環なので帰納法の仮定から } r_1, \dots, r_{c-1} \neq \text{reg.} \quad \left. \begin{array}{l} \text{OK} \\ \square \end{array} \right\}$$

つよポイント : $\circ$ どんな $A \rightarrow B \rightarrow C$ かつでも 長完全列 が出る. 引数が 3 つもある.

・ そもそも D_0 が Ω なのでも大量に情報を持っている

◦ スペクトル系列が付随していて Tor から計算できる

・正則列乗余で Σ になつたり ρ がりやすく振舞ふがよい。

Thm. 8.14 (CI の検出) $(R, \mathfrak{m}, k)$: 局所環 TFAE

- (a) $R \neq \text{完交}$
- (b) $D_{\geq 3}(k/R, -) = 0$
- (c) $D_3(k/R, k) = 0$

Thm. 8.4 (l.c.i. の検出) $\varphi: R \rightarrow S$: Noether 環の射 TFAE

- (a) $\varphi \neq \text{l.c.i.}$
- (b) $D_{\geq 2}(S/R, -) = 0$
- (c) $D_2(S/R, -) = 0$

Thm. 8.12 (regular の検出) $(R, \mathfrak{m}, k)$: 局所環 TFAE

- (a) $R \neq \text{regular}$
- (b) $D_{\geq 2}(k/R, -) = 0$
- (c) $D_2(k/R, k) = 0$

$R: \text{reg.} \Leftrightarrow R \rightarrow k$ が c.i.
 かつ 8.4 & 8.5 から分かる.

Thm. 9.5 (reg. mor. の検出) $\varphi: R \rightarrow S$: Noether 環の射 TFAE

- (a) $\varphi \neq \text{regular}$
- (b) $D_{\geq 1}(S/R, -) = 0$
- (c) $D_1(S/R, -) = 0$

Thm. 9.6 (sm. mor. の検出) $\varphi: (R, \mathfrak{m}, k) \rightarrow (S, \mathfrak{n}, l)$: Noether 局所環の局所射
 ess. of f.t.

- (a) $\varphi \neq \text{smooth}$
- (b) $D_{\geq 1}(S/R, -) = 0$ かつ $\Omega_{S/R}$: 有限自由
- (c) $D_1(S/R, l) = 0$

Conj. (Quillen Conjecture I, II) $\varphi: R \rightarrow S$: Noether 環の射 ess. of f.t.

(I) $\text{f.d.s } L_{S/R} \subset \text{f.d.R } S$ が有限存 $\varphi \neq \text{l.c.i.}$

(II) $\text{f.d.s } L_{S/R}$ が有限存

$$\text{f.d.s } L_{S/R} \leq 2.$$

..... flat dim.